Ejercicio Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 2

Roger Balsach

3 de febrer de 2019

Tenemos un campo ϕ, del cual sabemos que existe una "cosa" (que denotaré por $\mathscr{C}(\phi)$) tal que

$$\mathscr{C}(\phi) = -6\phi_1^2 - 6\phi_2^2 - 6\phi_3^2 - \sqrt{2}\phi_1\phi_2 - \sqrt{2}\phi_2\phi_3 \tag{1}$$

1 Cálculo de la matriz A

Tenemos que encontrar una matriz A que cumpla que

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Primero de todo, recordemos que para multiplicar dos matrices se necesita una condición; para multiplicar $A \cdot B$ el número de *columnas*[1] de A tiene que ser igual al numero de *filas*[2] de la matriz B. Si nos fijamos en la ecuación matricial (2) vemos que A tiene que ser una matriz 3×3 para que ésta tenga sentido. Entonces podemos escribir la ecuación como

$$\begin{pmatrix} \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = a_{11}\phi_1^2 + a_{22}\phi_2^2 + a_{33}\phi_3^2 + (a_{12} + a_{21})\phi_1\phi_2 \\ + (a_{13} + a_{31})\phi_1\phi_3 + (a_{23} + a_{32})\phi_2\phi_3$$

[1] Recordemos que las columnas de la matriz son los "grupos verticales" de números

[2] Recordemos que las filas de una matriz son los "grupos horizontales" de números

Por lo que comparando con la ecuación (1) obtenemos que $a_{11} = a_{22} = a_{33} = -6$, $a_{12} + a_{21} = a_{23} + a_{32} = -\sqrt{2}$, $a_{13} + a_{31} = 0$, existen infinitas matrices que cumplen estas condiciones, por lo que tenemos la suerte que podemos buscar una matriz que no solo cumpla lo que ha pedido Javier, sino que además tenga propiedades que nos ayuden. Para el siguiente ejercicio necesitaremos diagonalizar la matriz A, y Javier nos ha asegurado que toda matriz simétrica es diagonalizable, por este motivo vamos a ver si podemos imponer que A sea simétrica.
Con la condición de simetría ($a_{12} = a_{21}$, $a_{13} = a_{31}$, $a_{23} = a_{32}$) vemos que la única matriz A posible es

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -6 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -6 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 6 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 6 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 6 \end{pmatrix} \tag{3}$$

2 Diagonalizar A

Primero debemos encontrar los valores y vectores propios. Éstos cumplen que

$$Av = \lambda v \Longrightarrow Av - \lambda v = (A - \lambda)v = 0 \tag{4}$$

Donde debe entenderse que $(A - \lambda) = (A - \lambda I)$ siendo I la matriz identidad 3×3. La ecuación (4) tiene la solución trivial $v = 0$, pero esto nos dice muy poco, así que queremos encontrar las soluciones $v \neq 0$.
Existe un teorema[3] que afirma que una ecuación del tipo (4) tiene una solución única si $\det(A - \lambda) \neq 0$ y tiene cero o infinitas soluciones si $\det(A - \lambda) = 0$. Así que vamos a buscar qué valores de λ cumplen que

[3] Teorema de Rouché-Frobenius.

$$0=|A-\lambda|=-|\lambda-A|=-\begin{vmatrix}\lambda+6 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \lambda+6 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \lambda+6\end{vmatrix}$$
$$=-(\lambda+6)\begin{vmatrix}\lambda+6 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \lambda+6\end{vmatrix}+\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \lambda+6\end{vmatrix}=-(\lambda+6)\left[(\lambda+6)^2-\frac{1}{2}\right]+\frac{\lambda+6}{2}$$
$$=-(\lambda+6)\left[(\lambda+6)^2-1\right]=-(\lambda+6)\left[\lambda^2+12\lambda+35\right]=-(\lambda+6)(\lambda+5)(\lambda+7)=0$$

De donde vemos directamente que los únicos valores para los que existirán soluciones no triviales son $\lambda=-5$, $\lambda=-6$, $\lambda=-7$. Empecemos por $\lambda=-5$, tenemos que encontrar un vector ψ_1 que cumpla

$$\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+\frac{y}{\sqrt{2}}\\ \frac{x+z}{\sqrt{2}}+y\\ \frac{y}{\sqrt{2}}+z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow\psi_1=N\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}\tag{5}$$

Repitiendo el mismo argumento para $\lambda=-6$

$$\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{y}{\sqrt{2}}\\ \frac{x+z}{\sqrt{2}}\\ \frac{y}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow\psi_2=N\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}\tag{6}$$

Y finalmente para $\lambda=-7$

$$\begin{pmatrix}-1 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-x+\frac{y}{\sqrt{2}}\\ \frac{x+z}{\sqrt{2}}-y\\ \frac{y}{\sqrt{2}}-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Longrightarrow\psi_1=N\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ 1\end{pmatrix}\tag{7}$$

Por lo tanto la matriz M será

$$M=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2} & 1\\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}\\ 1 & -\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\tag{8}$$

Esto nos permite calcular la matriz A diagonalizada, en efecto calculando M^tAM

$$\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}1 & -\sqrt{2} & 1\\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2}\\ 1 & \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 6 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & \sqrt{2} & 1\\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2}\\ 1 & -\sqrt{2} & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & -6 & 0\\ 0 & 0 & -7\end{pmatrix}$$

3 Calcular $\mathscr{C}$ en la base ψ

Como nos enseña Javier en el capítulo

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \psi_1 + \sqrt{2}\psi_2 + \psi_3 \\ -\sqrt{2}\psi_1 + \sqrt{2}\psi_3 \\ \psi_1 - \sqrt{2}\psi_2 + \psi_3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Sustituyendo en (1)

$$\begin{aligned} \mathscr{C}(\phi) = &-6\left(\frac{\psi_1 + \sqrt{2}\psi_2 + \psi_3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{-\sqrt{2}\psi_1 + \sqrt{2}\psi_3}{2}\right)^2 - 6\left(\frac{\psi_1 - \sqrt{2}\psi_2 + \psi_3}{2}\right)^2 \\ &- \sqrt{2}\left(\frac{\psi_1 + \sqrt{2}\psi_2 + \psi_3}{2}\right)\left(\frac{-\sqrt{2}\psi_1 + \sqrt{2}\psi_3}{2}\right) \\ &- \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}\psi_1 + \sqrt{2}\psi_3}{2}\right)\left(\frac{\psi_1 - \sqrt{2}\psi_2 + \psi_3}{2}\right) \\ = &-5\psi_1^2 - 6\psi_2^2 - 7\psi_3^2 \end{aligned}$$

Tal como nos pedía demostrar Javier.